ΘΕΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

1. Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = 2cx^{-3}e^{x^{-2}} \cdot I_A(x) \tag{1}$$

όπου I_A η δείκτρια τ.μ του A και A είναι το διάστημα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. Να βρεθούν:

   i. Η σταθερά c.

   ii. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = \frac{1}{X^2}$.

   iii. Η μέση τιμή και η διασπορά της Y.

(9/2015 Μαθηματικό Αθήνας)

Σχόλιο: υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός I_A σημαίνει:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

συνεπώς για $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

δηλαδή

$$f(x) = 2cx^{-3}e^{x^{-2}} \cdot I_A(x) = \begin{cases} 2cx^{-3}e^{x^{-2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Λύση:

i. Για να βρούμε τη σταθερά c αξιοποιούμε το γεγονός ότι για τη συνάρτηση πυκνότητας έχουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, πιο αναλυτικά έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2cx^{-3}e^{x^{-2}} \cdot I_A dx = 1 \Rightarrow$$
$$c \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 2x^{-3}e^{x^{-2}} dx = 1 \Rightarrow$$
$$c \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(-e^{x^{-2}}\right)' dx = 1 \Rightarrow$$
$$c \cdot \left[-e^{x^{-2}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = 1 \Rightarrow$$
$$c \cdot (e^2 - e) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e^2 - e)}$$

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{e^2-e} \cdot x^{-3} \cdot e^{x^{-2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{-1}$$

1°Βήμα Βρίσκουμε τις τιμές που παίρνει η $Y = \frac{1}{X^2}$

Παρατηρούμε ότι η X παίρνει τιμές[1] στο διάστημα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ επομένως η $Y = \frac{1}{X^2}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $(1, 2)$ πιο αναλυτικά:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 < x^2 < 1^2 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2} < x^2 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x^2} < 2.$$

2°Βήμα Βρίσκουμε τη συνάρτηση κατανομής της $Y = \frac{1}{X^2}$

Παρατηρούμε ότι επειδή η $Y = \frac{1}{X^2}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $(1, 2)$ για $y \leq 1$, έχουμε $F_Y(y) = 0$ και για $y \geq 2$, έχουμε $F_Y(y) = 1$, τέλος για $1 < y < 2$ η

[1] πιο αυστηρά εννοούμε το στήριγμα $S_X = \{x \in \mathbb{R} : \quad f_X(x) > 0\}$

συνάρτηση κατανομής είναι:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X^2} \leq y\right) \\ &= P\left(X^2 \geq \frac{1}{y}\right) = P\left(|X| \geq \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \\ &= P\left(X \geq y^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

επειδή η X παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ έχουμε $|X| = X$

$$= 1 - P\left(X < y^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - P\left(X \leq y^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - F_X\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)$$

επειδή η X είναι συνεχής $P\left(X \leq y^{-\frac{1}{2}}\right) = P\left(X < y^{-\frac{1}{2}}\right)$

Άρα:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ 1 - F_X\left(y^{-\frac{1}{2}}\right), & 1 < y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

3°Βήμα Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση κατανομής

Για $y \in (1,2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) = \left(1 - F_X\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)\right)' \\ &= -F_X'\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)' = -F_X'\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}} \cdot f_X\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{e^2 - e} \cdot \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3} \cdot e^{\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}} \\ &= \frac{1}{e^2 - e} \cdot e^y \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ \frac{1}{e^2 - e} \cdot e^y, & 1 < y < 2 \\ 0, & y \geq 2 \end{cases}$$

στους κλαδους για $y \leq 1$ και $y \geq 2$ η συνάρτηση πυκνότητας είναι 0 γιατί απο το 1° βήμα έχουμε δείξει ότι η $Y = \frac{1}{X^2}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $(1,2)$[2]

[2] εναλλακτικά μπορεί κάποιος να παραγωγίσει την $F_Y(y)$ για $y < 1$ και $y > 2$ όπου θα έχουμε $F_Y'(y) = 0$ και για τις τιμές $y = 1, y = 2$ μπορεί να βάλει αυθαίρετα οποιαδήποτε μη αρνητική τιμή.

2^{ος} τρόπος για να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας της $Y = \frac{1}{X^2} = g(X)$ είναι με τη βοήθεια της σχέσης[3] (;;) στη σελίδα ;; την οποία για ευκολία την υπενθυμίζουμε στο πλαίσιο παρακάτω:

Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητητας με $R_X := X(\Omega)$
Αν ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι 1-1 απο το σύνολο R_X επί του συνόλου $R_Y := g(R_X)$ και υπάρχει η $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$ και είναι συνεχής, τότε η $Y = g(X)$ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \quad y \in R_Y.$$

Κάνοντας εφαρμογή του παραπάνω με:
- $g(x) = \frac{1}{x^2}$
- $R_X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$
- $R_Y = (1, 2)$

Παρατηρούμε ότι $R_Y := g(R_X)$, ότι ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι 1-1[4] απο το σύνολο $R_X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ επί του συνόλου $R_Y = (1, 2)$ και υπάρχει η $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$ και είναι συνεχής.
Θα υπολογίσουμε την αντίστροφη της $y = g(x)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{x^2} &\Rightarrow x^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow \\ x = \frac{1}{\sqrt{y}} &\Rightarrow g^{-1}(y) = y^{-\frac{1}{2}} \quad y \in (1, 2) \end{aligned}$$

οπότε για τη συνάρτηση πυκνότητας υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \\ &= f_X\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left|\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)'\right| \\ &= \frac{2}{e^2 - e} \cdot \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3} \cdot e^{\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{e^2 - e} \cdot e^y \end{aligned}$$

καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα όπως και με το προηγούμενο τρόπο:

[3] το οποίο είναι γνωστό θεώρημα
[4] μάλιστα είναι φθίνουσα

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{e^2-e}e^y, & y \in (1,2) \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(-2)

iii. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή με τη βοήθεια του ορισμού:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \int_1^2 y \cdot \frac{1}{e^2-e}e^y dy \\ &= \frac{1}{e^2-e}\int_1^2 ye^y dy \quad (1) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με τη βοήθεια της παραγοντικής ολοκλήρωσης[5]

$$\begin{aligned} \int_1^2 ye^y dy &= \int_1^2 y(e^y)'dy = [ye^y]_1^2 - \int_1^2 e^y dy \\ &= 2e^2 - e - [e^y]_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) \\ &= e^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$E(Y) = e^2 \cdot \frac{1}{e^2-e} = \frac{e}{e-1}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς χρησιμοποιούμε τη σχέση (;;) στη σελίδα ;;

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy = \int_1^2 y^2 \frac{1}{e^2-e}e^y dy \\ &= \frac{1}{e^2-e}\int_1^2 y^2 e^y dy \quad (4) \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα το υπολογίζουμε ομοίως με πριν με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} \int_1^2 y^2 e^y dy &= \int_1^2 y^2 (e^y)'dy = \left[y^2 e^y\right]_1^2 - 2\cdot\int_1^2 ye^y dy = 4e^2 - e - 2\cdot e^2 \\ &= 2e^2 - e \quad (5) \end{aligned}$$

[5] δηλαδή με τη βοήθεια της σχέσης $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = [f'(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx$

όπου για το τελευταίο ολοκλήρωμα αντικαταστήσαμε με τη βοήθεια της (2). από τις (4) και (5)

$$E(Y^2) = \frac{1}{e^2 - e} \cdot (2e^2 - e)$$

Τελικά:

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{2e^2 - e}{e^2 - e} - \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 = 1 + \frac{e}{e-1} - \left(\frac{e}{e-1}\right)^2$$

2. Η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < \chi < 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Y = |X - 1|$. Υπολογίστε:

i. την συνάρτηση κατανομής της $Y, F_Y(y), y \in \mathbb{R}$.

ii. την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y, f_Y(y)$.

(4/2014 Μαθηματικό Αθήνας)

Λύση:

i. 1°Βήμα Βρίσκουμε τη συνάρτηση κατανομής της X

Για να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής της $Y = |X - 1|$ πρέπει να βρούμε[6] τη συνάρτηση κατανομής της X. Επειδή η X παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 2)$ έχουμε ότι $F_X(x) = 0, \quad x \leq 0$ και $F_X(x) = 1, \quad x \geq 2$ και για $x \in (0, 2)$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση κατανομής της X είναι:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

[6] Σε άλλα θέματα αυτό δεν χρειαζόταν γιατί θέλαμε συνάρτηση πυκνότητας και όχι κατανομής

2°Βήμα Βρίσκουμε τις τιμές που παίρνει η $Y = |X-1|$

επειδή η X παίρνει τιμές στο διάστημα $(0,2)$

$$\begin{aligned}&0 < x < 2 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow\\&0 \leq |x-1| < 1\end{aligned}$$

Επομένως η $Y = |X-1|$ παίρνει τιμές στο $[0,1)$,

3°Βήμα Βρίσκουμε τη συνάρτηση κατανομής της $Y = |X-1|$

Παρατηρούμε ότι επειδή η $Y = |X-1|$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1)$ για $y < 0$, έχουμε $F_Y(y) = 0$ και για $y \geq 1$, έχουμε $F_Y(y) = 1$, τέλος για $0 \leq y < 1$ η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(|X-1| \leq y\right)\\&= P\left((1-y \leq X \leq 1+y\right)\\&= F_Y(1+y) - F_Y(1-y)\end{aligned}$$

η τελευταία ισότητα επειδή η Y είναι συνεχής

$$= \frac{1}{4}(1+y)^2 - \frac{1}{4}(1-y)^2 = y, \quad 0 \leq y < 1$$

Άρα:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

που είναι η συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης στο διάστημα $(0,1)$, δηλαδή $Y \sim U(0,1)$.

ii. $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

Σχόλιο: Η παράγωγος δεν υπάρχει όταν $y = 0$ ή $y = 1$, οπότε ορίζουμε αυθαίρετα την πυκνότητα στα δύο αυτά σημεία εδώ θέσαμε $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$.

3. Έστω μια τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_X(x) = (2\pi x)^{-1/2} exp\{-\frac{x}{2}\}$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $Z = I \cdot \sqrt{X}$, όπου I είναι τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της X, που παίρνει τις τιμές -1 και 1 ισοπίθανα. (6/2016 Μαθηματικό Αθήνας)

Σχόλιο: Αν βρούμε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Z θα έχουμε προσδιορίσει τη κατανομή της[7]

Λύση: Αρχικά θέτουμε $Y = \sqrt{X}$ και βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση πυκνότητας της $Y = \sqrt{X} = g(X)$ με τη βοήθεια της σχέσης[8] (;;) στη σελίδα ;; ομοίως με τη λύση που παρουσιάσαμε σε προηγούμενα θέματα κάνοντας εφαρμογή του παραπάνω με:

- $g(x) = \sqrt{x}$
- $R_X = (0, +\infty)$
- $R_Y = (0, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι $R_Y := g(R_X)$, ότι ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι 1-1[9] απο το σύνολο $R_X = (0, +\infty)$ επί του συνόλου[10] $R_Y = (0, +\infty)$ και υπάρχει η $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$ και είναι συνεχής[11].

Πιο αναλυτικά για την αντίστροφη της $y = g(x)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} &y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow \\ &g^{-1}(y) = y^2 \quad y \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

οπότε για τη συνάρτηση πυκνότητας υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \\ &= f_X\left(y^2\right) \cdot \left|\left(y^2\right)'\right| \\ &= \left(2\pi y^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} 2y \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad y > 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{-2}$$

Παρατηρήστε ότι είναι το διπλάσιο της πυκνότητας της τυποποιημένης κατανομής στο θετικό μέρος και ότι στο $y = 0$ είναι ασυνεχής.

[7] εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε την ροπογεννήτρια της που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο
[8] για ευκολία
[9] μάλιστα είναι αύξουσα
[10] αφού για $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > o$
[11] μάλιστα στη περίπτωση μας η $g^{-1}(y) = y^2$ είναι παραγωγίσιμη

Για την διακριτή τυχαία μεταβλητή I έχουμε από την εκφώνηση ότι:

$$P(I=1)=P(I=-1)=\frac{1}{2}$$

Τέλος θα υπολογίσουμε την συνάρτηση κατανομής της $Z=I\cdot\sqrt{X}=I\cdot Y$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z\leq z)=P(I\cdot Y\leq z)\\
&\overset{\Theta.O.\Pi}{=} P(I=-1)P(Z\leq z|I=-1)+P(I=1)P(Z\leq z|I=1)\\
&= P(I=-1)P(-1\cdot Y\leq z|I=-1)+P(I=1)P(1\cdot Y\leq z|I=1)\\
&= \frac{1}{2}P(Y\geq -z)+\frac{1}{2}P(Y\leq z)=\frac{1}{2}(1-P(Y<-z))+\frac{1}{2}P(Y\leq z)\\
&= \frac{1}{2}(1-P(Y\leq -z))+\frac{1}{2}P(Y\leq z)=\frac{1}{2}\left(F_Y(z)-F_Y(-z)+1\right)
\end{aligned}$$

επειδή η Y είναι συνεχής $P(Y<-z)=P(Y\leq -z)$

Η Y έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που είναι συνεχής για $y\neq 0$ και άρα

$$\begin{aligned}
f_Z(z)=F_z'(z) &= \left(\frac{1}{2}\left(F_Y(z)-F_Y(-z)+1\right)\right)'\\
&= \frac{1}{2}(F_Y'(z)+F_Y'(-z))=\frac{1}{2}\left(f_Y(z)+f_Y(-z)\right),\quad \text{για}\quad z\neq 0
\end{aligned}$$

Τελικά επειδή $Y>0$ (με πιθανότητα 1) έχουμε[12]

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(f_Y(z)+0\right), & z>0\\ \frac{1}{2}\left(0+f_Y(-z)\right), & z<0\end{cases}\quad\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-z)^2}{2}}, & z<0\end{cases}$$

οπότε

$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},\quad z\neq 0$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής για $z\neq 0$ και συμπεραίνουμε ότι $Z\sim N(0,1)$.

[12]δηλαδή $f_Y(k)=0,\quad k<0$

4. Η ζήτηση X ενός φάρμακου κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,2)$. Η φαρμακευτική εταιρεία θέλει να παρασκευάσει στην αρχή του έτους ποσότητα $\beta \in (0,2)$ του φαρμάκου. Διευκρινίζεται ότι η εταιρεία θα παρασκευάσει όλη την ποσότητα του φαρμάκου στην αρχή του έτους, τότε που δεν γνωρίζει την μελλοντική ζήτηση X. Η παρασκευή της ποσότητας β έχει κόστος παραγωγής 40β (το κόστος ανά μονάδα παραγωγής είναι 40), ενώ η τιμή πώλησης ανά μονάδα είναι 50. Να προσδιοριστεί η τιμή β^* που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας. [Υπόδειξη: Αν η εταιρεία παρασκευάσει ποσότητα β τότε θα εισπράξει συνολικά, στο τέλος του έτους, ποσό ίσο με $50 \cdot X$ αν $X \leq \beta$ και $50 \cdot \beta$ αν $X > \beta$, δηλαδή $50 \cdot \min\{X, \beta\}$.]
(4/2014 Μαθηματικό Αθήνας)

Λύση: Επειδή η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,2)$ έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Έστω β η ποσότητα που παρασκευάζει η εταιρεία. Αυτή η ποσότητα κοστίζει 40β ενώ η συνολική είσπραξη στο τέλος του έτους είναι $50 \cdot \min\{X, \beta\}$. Συνεπώς, το κέρδος Y ισούται με $Y = 50min\{X, \beta\} - 40\beta$ και το αναμενόμενο (=μέσο) κέρδος είναι:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(50 \cdot \min\{X, \beta\} - 40\beta) = 50 \cdot E(\min\{X, \beta\}) - 40\beta \\
&= 50 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \min\{x, \beta\} \cdot f(x)\, dx - 40\beta \\
&= 50 \cdot \int_{0}^{2} \min\{x, \beta\} \cdot \frac{1}{2}\, dx - 40\beta \\
&= 50 \cdot \frac{1}{2} \left(\int_0^\beta x\, dx + \int_\beta^2 \beta\, dx \right) - 40\beta \\
&= 50 \cdot \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\beta + \beta \cdot [x]_\beta^2 \right) - 40\beta \\
&= 50 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\beta^2}{2} - 0 + \beta \cdot (2 - \beta) \right) - 40\beta \\
&= 50 \cdot \left(\frac{\beta^2}{4} + \beta - \frac{\beta^2}{2} \right) - 40\beta = 10\beta - \frac{25 \cdot \beta^2}{2}
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $h(\beta) = 10\beta - \frac{25 \cdot \beta^2}{2}, \quad \beta \in (0,2)$ θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε αυτή την συνάρτηση ως προς β, οπότε όπως στη Γ λυκείου για να βρούμε ακρότατα βρίσκουμε κρίσιμα σημεία από τη σχέση $h'(\beta) = 0$, πιο αναλυτικά:

$$h'(\beta) = 0 \Rightarrow \left(10\beta - \frac{25 \cdot \beta^2}{2}\right)' = 0$$
$$10 - 25 \cdot \beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{10}{25}$$

επειδή $h''(\beta) = -25 < 0$ η συνάρτηση είναι κοίλη και έχει ολικό μέγιστο για $\beta = \frac{10}{25}$ τη τιμή $h\left(\frac{10}{25}\right)$

5. Η τ.μ X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x^2, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

i. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X.
ii. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(|X| \leq 0.2 | X > -0.5)$
iii. Να υπολογιστούν οι $E(|X|)$ και $V(|X|)$.

(Μαθηματικό Πάτρας 1/2016)

Λύση:

i. Γνωρίζουμε ότι $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ (όπου η τελευταία ισότητα λόγω του πεδίου ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας) πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις για το x.

- Αν $x < -1$,τότε $F(x) = 0$
- Αν $x > 1$, τότε $F(x) = 1$
- Αν $-1 \leq x \leq 0$, τότε

$$F(x) = \int_{-1}^{x} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{x^3+1}{3}$$

- Αν $0 < x \leq 1$ τότε

$$F(x) = \int_{-1}^{0} t^2 dt + \int_{0}^{x} (1-t^2)dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + [t]_0^x - \left[\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{x} = \frac{1}{3} + x - \frac{x^3}{3} = \frac{1+3x-x^3}{3}$$

άρα

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < -1 \\ \frac{x^3+1}{3}, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1+3x-x^3}{3}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 0$ ενώ η συνάρτηση κατανομης $F(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii.

$$P(|X| \leq 0.2 | X > -0.5) = \frac{P(\{|X| \leq 0.2\} \cap \{X > -0.5\})}{P(X > -0.5)} = \frac{P(\{-0.2 \leq X \leq 0.2\} \cap \{X > -0.5\})}{1 - P(X \leq -0.5)}$$

στη πρώτη ισότητα εφαρμόσαμε θεώρημα Bayes

$$= \frac{P(-0.2 \leq X \leq 0.2)}{1 - P(X \leq -0.5)} = \frac{F(0.2) - F(-0.2)}{1 - F(-0.5)}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

$$= \frac{\frac{0.2^3+1}{3} - \frac{1+3\cdot 0.2 - 0.2^3}{3}}{1 - \frac{(-0.5)^3+1}{3}}$$

όπου τα $F(-0.2)$, $F(0.2)$ και $F(-0.5)$ τα υπολογίζουμε από την από την συνάρτηση κατανομής που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

iii.

$$E(|X|) = \int_{-1}^{1} |x| \cdot f(x)dx = \int_{-1}^{0} -x \cdot x^2 dx + \int_{0}^{1} x \cdot (1 - x^2)dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Για να υπολογίσουμε τη διασπορά :

$$Var(|X|) = E(|X|^2) - (E|X|)^2 = E(X^2) - (E|X|)^2 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

αναλυτικά η $E(X^2)$ που αντικαταστήσαμε παραπάνω:

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2 \cdot x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot (1 - x^2)dx$$
$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

6. Έστω η κατανομή X τ.μ με κατανομή

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1) \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

i. Να βρεθεί η τιμή της πιθανότητας $P\left(|X| \leq 0.8\right)$
ii. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ $Y = X^3$
iii. Να υπολογισθεί η μέση τιμή της Y
(Α.Π.Θ 9/2007)

Λύση:

i. Η ακριβής τιμή της πιθανότητας είναι:

$$\begin{aligned} P(|X| \leq 0.8) &= P(-0.8 \leq X \leq 0.8) \\ &= \int_{-0.8}^{0.8} f(x)\, dx = \\ = \int_0^{0.8} 2x\, dx \int_0^{0.8} \left(x^2\right)'\, dx \\ &= \left[x^2\right]_0^{0.8} = 0.64 \end{aligned}$$

ii. 1°Βήμα Βρίσκουμε τις τιμές που παίρνει η $Y = X^3$

Παρατηρούμε ότι η X παίρνει τιμές[13] στο διάστημα $(0,1)$ επομένως η $Y = X^3$ παίρνει τιμές στο διάστημα $(0,1)$ πιο αναλυτικά:

$$\begin{aligned} &0 < x < 1 \Rightarrow 0^3 < x^3 < 1^3 \Rightarrow \\ &0 < x^3 < 1. \end{aligned}$$

2°Βήμα Βρίσκουμε τη συνάρτηση κατανομής της $Y = X^3$

Παρατηρούμε ότι επειδή η $Y = X^3$ παίρνει τιμές στο διάστημα $(0,1)$ για $y \leq 0$, έχουμε $F_Y(y) = 0$ και για $y \geq 1$, έχουμε $F_Y(y) = 1$, τέλος για $0 < y < 1$ η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(X^3 \leq y\right) \\ &= P\left(X \leq y^{\frac{1}{3}}\right) = F_X\left(y^{\frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

Άρα:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ F_X\left(y^{\frac{1}{3}}\right), & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

[13] πιο αυστηρά εννοούμε το στήριγμα $S_X = \{x \in \mathbb{R} : \quad f_X(x) > 0\}$

3°Βήμα Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση κατανομής

Για $y \in (0,1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F'_Y(y) &= \left(F_X\left(y^{\frac{1}{3}}\right)\right)' \\ &= F'_X\left(y^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = F'_X\left(y^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \cdot f_X\left(y^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \cdot 2y^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & y \geq 1 \end{cases}$$

2^{ος} τρόπος για να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας της $Y = X^3 = g(X)$ είναι με τη βοήθεια της σχέσης[14] (;;) στη σελίδα ;; την οποία για ευκολία την υπενθυμίζουμε στο πλαίσιο παρακάτω:

Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητητας με $R_X := X(\Omega)$
Αν ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι 1-1 απο το σύνολο R_X επί του συνόλου $R_Y := g(R_X)$ και υπάρχει η $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$ και είναι συνεχής, τότε η $Y = g(X)$ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \quad y \in R_Y.$$

Κάνοντας εφαρμογή του παραπάνω με:
- $g(x) = x^3$
- $R_X = (0,1)$
- $R_Y = (0,1)$

Παρατηρούμε ότι $R_Y := g(R_X)$, ότι ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι 1-1[15] απο το σύνολο $R_X = (0,1)$ επί του συνόλου $R_Y = (0,1)$ και υπάρχει η $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$ και είναι συνεχής.

Θα υπολογίσουμε την αντίστροφη της $y = g(x)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} &y = x^3 \Rightarrow x = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \\ &g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}} \quad y \in (0,1) \end{aligned}$$

[14] το οποίο είναι γνωστό θεώρημα
[15] μάλιστα είναι αύξουσα

οπότε για τη συνάρτηση πυκνότητας υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \\ &= f_X\left(y^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left|\left(y^{\frac{1}{3}}\right)'\right| \\ &= 2y^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot y^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα όπως και με το προηγούμενο τρόπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot y^{-\frac{1}{3}}, & y \in (0,1) \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{-3}$$

iii. Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $E(Y)$ χρησιμοποιούμε τον ορισμό

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 y \cdot \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} (1-0) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2^{ος} χωρίς τη συνάρτηση πυκνότητας της Y

$$\begin{aligned} E(Y) = E\left(X^3\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 x \cdot 2x^4 dx \\ &= 2 \int_0^1 x^4 dx \\ &= 2 \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{0}{5}\right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

7. Η τ.μ. X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1].
   i. Να βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $Y = \sqrt{X}$.
   ii. Να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y = \sqrt{X}$.
   iii. Να βρείτε ένα κάτω φράγμα της πιθανότητας $P\left(\frac{1}{3} < Y < 1)\right)$ με χρήση της ανισότητας Chebyshev

   (2/2018/ΑΠΘ)

Λύση:

i. Επειδή η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας της $Y = \sqrt{X}$:

1°Βήμα Βρίσκουμε τις τιμές που παίρνει η $Y = \sqrt{X}$

Παρατηρούμε ότι η X παίρνει τιμέστο διάστημα $[0,1]$ επομένως η $Y = \sqrt{X}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ πιο αναλυτικά:

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{0} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{1} \Rightarrow$$
$$0 \leq \sqrt{x} \leq 1$$

2°Βήμα Βρίσκουμε τη συνάρτηση κατανομής της $Y = \sqrt{X}$

Παρατηρούμε ότι επειδή η $Y = \sqrt{X}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ για $y < 0$, έχουμε $F_Y(y) = 0$ και για $y > 1$, έχουμε $F_Y(y) = 1$, τέλος για $0 \leq y \leq 1$ η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\sqrt{X} \leq y\right)$$
$$= P\left(X \leq y^2\right) = F_X\left(y^2\right)$$

Άρα:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ F_X\left(y^2\right), & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

3°Βήμα Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση κατανομής

Συνοψίζοντας η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2 \cdot y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

$2^{ος}$ τρόπος για να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας της $Y = \sqrt{X} = g(X)$ είναι με τη βοήθεια της σχέσης[16] (;;) στη σελίδα ;; την οποία για ευκολία την υπενθυμίζουμε στο πλαίσιο παρακάτω:

Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητητας με $R_X := X(\Omega)$
Αν ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι 1-1 απο το σύνολο R_X επί του συνόλου $R_Y := g(R_X)$ και υπάρχει η $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$ και είναι συνεχής, τότε η $Y = g(X)$ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \quad y \in R_Y.$$

Κάνοντας εφαρμογή του παραπάνω με:
- $g(x) = \sqrt{x}$
- $R_X = [0, 1]$
- $R_Y = [0, 1]$

Παρατηρούμε ότι $R_Y := g(R_X)$, ότι ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι 1-1[17] απο το σύνολο $R_X = [0, 1]$ επί του συνόλου $R_Y = [0, 1]$ και υπάρχει η $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$ και είναι συνεχής.
Θα υπολογίσουμε την αντίστροφη της $y = g(x)$, έχουμε:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2, \quad y \in [0, 1]$$

οπότε για τη συνάρτηση πυκνότητας υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \\ &= f_X\left(y^2\right) \cdot \left|\left(y^2\right)'\right| \\ &= 1 \cdot |2y| = 2y \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα επειδή $y \in [0, 1]$ έχουμε $|2y| = 2y$. Τελικά όπως και πριν καταλήγουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της $Y = \sqrt{X}$ είναι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & y \in [0, 1] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

ii. Για τη συνάρτηση κατανομής από το προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ F_X\left(y^2\right), & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

[16] το οποίο είναι γνωστό θεώρημα
[17] μάλιστα είναι αύξουσα

Το μόνο που μένει είναι να υπολογίσουμε $F_X\left(y^2\right), \quad 0 \leq y \leq 1$ όμως:

$$\begin{aligned} F_X\left(y^2\right) = P(X \leq y) &= \int_{-\infty}^{y^2} f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^{y^2} \cdot 1\,dx = [x]_0^{y^2} \\ &= y^2 - 0 = y^2 \end{aligned}$$

οπότε

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

2^ος^ τρόπος για να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής της $Y = \sqrt{X} = g(X)$: από προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι η $Y = \sqrt{X}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ οπότε για $y < 0$, έχουμε $F_Y(y) = 0$ και για $y > 1$, έχουμε $F_Y(y) = 1$, τέλος για $0 \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt \\ &= \int_0^y 2t\,dt \\ &= \left[t^2\right]_0^y = y^2 \end{aligned}$$

iii. Καταρχήν υπενθυμίζουμε την ανισότητα Chebyshev

Έστω Y είναι μια τυχαία μεταβλητή της οποίας υπάρχουν η μέση τιμή $\mu = E(Y)$ και η διασπορά $\sigma^2 = V(Y)$. Τότε:

$$P\left(|Y - \mu| \geq c\right) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

Για να βρούμε το κάτω φράγμα στην $P\left(\frac{1}{3} < Y < 1)\right)$ κάνουμε τα εξής:

1^ο^Βήμα Βρίσκουμε τη μέση τιμή μ και τη διασπορά σ^2

Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της Y:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy \\ &= \int_0^1 y \cdot 2y dy = 2 \cdot \int_0^1 y^2 dy \qquad (1) \\ &= 2 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τη διασπορά της Y:
Επειδή
$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \tag{2}$$
αρκεί να υπολογίσουμε το $E(Y^2)$ όμως:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E\left[\left(\sqrt{X}\right)^2\right] = E(X) = \frac{0+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε από θεωρία ότι όταν $X \sim U(a,b)$ τότε $E(X) = \frac{a+b}{2}$

2[ος] τρόπος για να βρούμε την $E(Y^2)$ είναι με τον ορισμό:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_Y(y)\, dy \\ &= \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy = 2 \cdot \int_0^1 y^3 dy \\ &= 2 \cdot \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα από τις σχέσεις (1),(2),(3) η διασπορά είναι

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \tag{4}$$

2[ο]Βήμα από τη δοθείσα ανισότητα «χτίζουμε» την ανισότητα Chebyshev

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{3} < Y < 1\right) &= P\left(\frac{1}{3} - \mu < Y - \mu < 1 - \mu\right) \\ &= P\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} < Y - \frac{2}{3} < 1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{3} < Y - \frac{2}{3} < \frac{1}{3}\right) \\ &= P\left(\left|Y - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - P\left(\left|Y - \frac{2}{3}\right| \geq \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Στην τελευταία θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Chebyshev με $\mu = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$ και $\sigma^2 = \frac{1}{18}$ οπότε

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{3} < Y < 1\right) &= 1 - P\left(\left|Y - \frac{2}{3}\right| \geq \frac{1}{3}\right) \\
&\geq 1 - \frac{\frac{1}{18}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
&\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$