Περιεχόμενα

1 Μεθοδολογίες στην εκτιμητική

1.1 *Πως δείχνουμε ότι μια εκτιμήτρια $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underset{\sim}{\theta})$;*

Απάντηση: Δείχνουμε ότι $E(T) = g(\underset{\sim}{\theta})$

1.2 *Πως δείχνουμε ότι μια εκτιμήτρια $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι ασυμπτωτική αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underset{\sim}{\theta})$;*

Απάντηση: Δείχνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} E\left(T_n(\underset{\sim}{X})\right) = g(\underset{\sim}{\theta})$

1.3 *Πως δείχνουμε ότι μια εκτιμήτρια $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής εκτιμήτρια της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$;*

Απάντηση: Με τους εξής 3 τρόπους:
- Με ορισμό (δύσχρηστος)
- Με Παραγοντικό κριτήριο Neyman
- Με Πρόταση για ΕΟΚ

1.4 *Πως δείχνουμε ότι μια εκτιμήτρια $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι πλήρης;*

Απάντηση:
Εαν η σχέση $E\left(\Psi(T)\right) = 0$ για κάθε $\underset{\sim}{\theta} \in \Theta$ έχει σαν συνέπεια $\Psi(T) = 0$ με πιθανότητα 1 (σχεδόν παντού).

1.5 *Πως βρίσκουμε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underset{\sim}{\theta})$;*

Απάντηση:
Πρώτος τρόπος:

- βρίσκουμε μια στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X})$ επαρκή και πλήρη
- προσδιορίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας (ή πιθανότητας) $f_T(t;\underset{\sim}{\theta})$
- λύνουμε τη συναρτησιακή εξίσωση $E\left(\Psi(T)\right) = g(\underset{\sim}{\theta})$ ως προς $\Psi(T)$ που είναι η ζητούμενη εκτιμήτρια.

Δεύτερος τρόπος: Βρίσκω μια αμερόληπτη εκτιμήτρια $T = T(\underset{\sim}{X})$ του $g(\underset{\sim}{\theta})$ και στη συνέχεια δείχνω ότι πιάνει το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramer-Rao

1.6 *Πως δείχνουμε ότι μια εκτιμήτρια $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$;*

Απάντηση:
Δείχνουμε ότι η $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ (δηλαδή είναι αμερόληπτη και πιάνει το κάτω φράγμα της Cramer-Rao με τους εξής τρεις τρόπους:

- δείχνουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $k(\theta) \neq 0$ ώστε $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\underset{\sim}{x},\theta) = k(\theta)\Big(T(\underset{\sim}{x}) - g(\theta)\Big)$
- Για $g(\theta) = \frac{A'(\theta)}{Q'(\theta)}$ αρκεί να δείξουμε ότι η κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{X}$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ με συνάρτηση πιθανότητας $f(\underset{\sim}{x},\theta) = \exp\Big(Q(\theta)T(\underset{\sim}{X}) - A(\theta)\Big)$
- δείχνουμε ότι η $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\theta)$ και δείχνουμε ότι διασπορά της πιάνει το κάτω φράγμα της Cramer-Rao.

1.7 *Πως δείχνουμε ότι μια εκτιμήτρια $T_n = T_n(\underset{\sim}{X})$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης $g(\underset{\sim}{\theta})$;*

Απάντηση:
με τους εξής τρόπους

- Με τον ορισμο. $T_n(\underset{\sim}{X}) \xrightarrow{p} g(\underset{\sim}{\theta})$ για κάθε $\underset{\sim}{\theta} \in \Theta$.
- Δείχνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} E\Big(T_n(\underset{\sim}{X})\Big) = g(\underset{\sim}{\theta})$ και $\lim_{n\to\infty} V\Big(T_n(\underset{\sim}{X})\Big) = 0$
- Δείχνουμε [1] ότι υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\geq 1}$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ώστε $a_n\Big[T_n(\underset{\sim}{X}) - g(\underset{\sim}{\theta})\Big] \xrightarrow{d} Y$ για κάποια τυχαία μεταβλητή Υ[2]
- (Αν $\underset{\sim}{\theta} = \theta$) Βρίσκουμε μια $(X_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών με $E(X_1) = \theta$ και μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $T_n = g(\overline{X_n})$, από τον ασθενή νόμο μεγάλων αριθμών έχουμε $\overline{X_n} \xrightarrow{p} \theta$ και από το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης $T_n = g\left(\overline{X_n}\right) \xrightarrow{p} g(\theta)$

[1] Εδώ χρησιμεύει και η μέθοδος Δέλτα: αν υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(r_n)_{n\geq 1}$ με $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ ώστε $r_n\left(X_n - a\right) \xrightarrow{d} X$ και συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $a \in \mathbb{R}$ τότε $r_n\left[\phi(X_n) - \phi(a)\right] \xrightarrow{d} \phi'(a)\cdot X$

[2] Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι η $T_n(\underset{\sim}{X})$ έχει ασυμπτωτική κατανομή