Περιεχόμενα

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ 1

1 Κατανομές πιθανότητας διδιάστατων τυχαίων μεταβλητών

1.1 Τα κύρια σημεία της θεωρίας

1.1 *Τι καλείται διδιάστατη τυχαία μεταβλητή;*

Απάντηση: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $X = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ καλείται διδιάστατη τυχαία μεταβλητή[1].

1.2 *Τι καλείται κατανομή πιθανότητας μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής;*

Απάντηση: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, $X = (X_1, X_2)$ μια τυχαία διδιάστατη μεταβλητή ορισμένη στο Ω. Η πιθανότητα στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}^2$ των ενδεχομένων στο $X(\Omega)$ είναι μια συνολοσυνάρτηση $P_X(\cdot)$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathcal{B}^2$$

καλείται κατανομή πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $X = (X_1, X_2)$.

Σχόλιο: Στη πράξη αν $X(\Omega)$ είναι διακριτό με $X = (X_1, X_2)$ τότε

$$\mathcal{B}^2 = \mathcal{P}\left(X(\Omega)\right)$$

που είναι το δυναμοσύνολο των υποσυνόλων του $X(\Omega)$.

[1] ή τυχαίο διάνυσμα

Αν $X(\Omega)$ είναι συνεχής (μη διακριτός) με $X = (X_1, X_2)$ τότε

$$\mathcal{B}^2 = \sigma\left(\mathcal{C}^2\right)$$

που είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που παράγεται[2] από τα ημιανοιχτά διαστήματα της μορφής

$$(x, y] = (x_1, y_1] \times (x_2, y_2]$$

όπου $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

1.3 *Τι καλείται συνάρτηση κατανομής ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής;*

Απάντηση: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, $X = (X_1, X_2)$ μια τυχαία διδιάστατη ορισμένη στο Ω. Η συνάρτηση F_X που ορίζεται από τη σχέση:

$$F_X(x_1, x_2) = P(X \leq x) = P\left(\{\omega \in \Omega : \quad X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}\right)$$

καλείται συνάρτηση κατανομής ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X ή απο κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2.

1.4 *Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) ;*

Απάντηση: Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x, y)$ μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) έχει τις εξής ιδιότητες:

i. $0 \leq F(x, y) \leq 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

ii. Η $F(x)$ είναι αύξουσα ως προς κάθε μία από τις μεταβλητές x και y:

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y) \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 \leq x_2 \text{ και } y \in \mathbb{R} \text{ σταθερή,}$$

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2) \text{ για κάθε } y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ με } y_1 \leq y_2 \text{ και } x \in \mathbb{R} \text{ σταθερή,}$$

iii. Η $F(x)$ είναι δεξιά συνεχής ως προς κάθε μία από τις μεταβλητές x και y:

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n, y) = F(x, y) \quad \forall \quad x_n \downarrow x,$$

$$\lim_{n\to+\infty} F(x, y_n) = F(x, y) \quad \forall \quad y_n \downarrow y,$$

iv. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \leq x_2$ και $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 \leq y_2$ ισχύει

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2 = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

[2] περιέχει τα ημιανοιχτά διαστήματα

v. Ικανοποιεί τις οριακές σχέσεις:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0 = \lim_{y\to-\infty} F(x,y).$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$$

Επίσης συμβολίζουμε

$$F(-\infty,y) := \lim_{x\to-\infty} F(x,y), \quad F(x,+\infty) := \lim_{y\to-\infty} F(x,y)$$

1.5 *Τι καλείται περιθώρια συνάρτηση κατανομής ;*

Απάντηση: Η συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = P(X \le x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y), \quad x \in \mathbb{R}$$

της τυχαίας μεταβλητής-συντεταγμένης X θεωρούμενη στο πλαίσιο της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) καλείται περιθώρια συνάρτηση κατανομής της X.

1.2 Διακριτές Τυχαίες μεταβλητές

1.6 *Τι καλείται διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και τι συνάρτηση πιθανότητας;*

Απάντηση: Μια τυχαία διδιάστατη μεταβλητή (X,Y) καλείται διακριτή αν παίρνει με πιθανότητα 1 πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τιμών $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\}$ δηλαδή

$$P\left((X,Y) \in \{(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y_j) = 1$$

Στη περίπτωση αυτή η συνάρτηση

$$f_{X,Y}(x_i,y_j) = P(X=x_i, Y=y_j)$$

καλείται συνάρτηση πιθανότητας[3] των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

[3] ή από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

1.7 *Ποια είναι η σχέση της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής μιας διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής ;*

Απάντηση:
Έστω (X, Y) μια διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 0, 1, 2 \dots$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \le x, Y \le y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι οι δυνατές τιμές $x_0, x_1, \dots$ έχουν αριθμηθεί έτσι ώστε $x_0 < x_1 < \cdots$ και οι δυνατές τιμές $y_0, y_1, \dots$ έχουν αριθμηθεί έτσι ώστε $y_0 < y_1 < \cdots$, τότε

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < x_0,\ y \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad x \in \mathbb{R},\ y < y_0 \\ \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} f_{X,Y}(x_i, y_j), & x_i \le x < x_{i+1}, \quad y_j \le y < y_{j+1} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

και

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = F_{X,Y}(x_i, y_j) - F_{X,Y}(x_{i-1}, y_j) - F_{X,Y}(x_i, y_{j-1}) + F_{X,Y}(x_{i-1}, y_{j-1}) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

με $x_{-1} = y_{-1} = -\infty$

1.8 *Τι καλείται περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής;*

Απάντηση:Έστω μια τυχαία διδιάστατη μεταβλητή (X, Y) η πιθανότητα

$$f_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = x_i, Y = y_j)$$

καλείται περιθώρια συνάρτηση της X.

1.3 Συνεχείς Διδιάστατες Τυχαίες μεταβλητές

1.9 *Τι καλείται συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και τι συνάρτηση πυκνότητας;*

Απάντηση: Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση $f(x, y) \geq 0 \quad x, y \in \mathbb{R}$ με $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$ τέτοια ώστε για κάθε $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$ και $c \leq d$

$$P\left(a < X \leq b,\ c < Y \leq d\right) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

Στη περίπτωση αυτή η συνάρτηση $f(x, y)$ καλείται συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής. [4]

1.10 *Ποια είναι η σχέση της συνάρτησης πυκνότητας και της συνάρτησης κατανομής μιας συνεχούς διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής;*

Απάντηση:
Έστω (X, Y) μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y)$ και συνάρτηση κατανομής $F(x, y) = P(X \leq x,\ Y \leq y)$. Τότε

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(t, u)\, dt\, du$$

και στη περίπτωση που υπάρχει η μεικτή παράγωγος της[5] $F(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}$$

2 Δεσμευμένες κατανομές

[4] ή από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y
[5] Αν η $f(x, y)$ είναι συνεχής για παράδειγμα στο (x, y)

2.1 Τα κύρια σημεία της θεωρίας

2.1 *Τι καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας και τι δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής στη διακριτή περίπτωση;*

Απάντηση: Έστω (X, Y) μια διακριτή διδιάστατη τυχαίας μεταβλητή με

$$f_{X,Y}(x_i, y_j), \quad i.j = 0, 1, 2\dots$$

συνάρτηση πιθανότητας και $f_Y(y_j), \quad j = 0, 1, 2\dots$ περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y. Η συνάρτηση πιθανότητας:

$$f_{X\,|\,Y}(x_i\,|\,y_j) = P(X = x_i\,|Y = y_j) := \frac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}, \quad i = 0, 1, 2\dots$$

καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένης της $Y = y_j$ υπο την προυπόθεση ότι $f_Y(y_j) > 0$. Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής αυτής συμβολίζεται με

$$F_{X\,|\,Y}(x\,|\,y_j) = P(X \le x\,|\,y_j)$$

και καλείται δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X δεδομένης της $Y = y_j$.

2.2 *Ποια είναι η σχέση της δεσμευμένης συνάρτησης με την απο κοινού συνάρτηση κατανομής και την περιθώρια συνάρτηση κατανομής στη διακριτή περίπτωση;*

Απάντηση: Έστω (X, Y) μια διακριτή διδιάστατη τυχαίας μεταβλητή και υποθέτουμε ότι οι δυνατές τιμές $y_0, y_1, \dots$ της μεταβλητής Y έχουν αριθμηθεί έτσι ώστε $y_0 < y_1 < \cdots$, τότε

$$F_{X\,|\,Y}(x\,|\,y_j) = \frac{F_{X\,,Y}(x\,,\,y_j) - F_{X\,,Y}(x\,,\,y_{j-1})}{F_Y(y_j) - F_Y(y_{j-1})}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

2.3 *Τι καλείται δεσμευμένη συνάρτηση ς και τι δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής στη συνεχή περίπτωση;*

Απάντηση: Έστω (X, Y) μια συνεχής διδιάστατη τυχαίας μεταβλητή με

$$f_{X,Y}(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

συνάρτηση πυκνότητας και $f_Y(y), y \in \mathbb{R}$ περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής Y. Η συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) =:= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένης της $Y = y$ υπο την προυπόθεση ότι $f_Y(y) > 0$. Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής αυτής συμβολίζεται με

$$F_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)$$

και καλείται δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X δεδομένης της $Y = y$.

2.4 *Ποια είναι η σχέση της δεσμευμένης συνάρτησης με την από κοινού συνάρτηση κατανομής και την περιθώρια συνάρτηση κατανομής στη συνεχή περίπτωση;*

Απάντηση: Έστω (X, Y) μια συνεχή διδιάστατη τυχαίας μεταβλητή τότε

$$F_{X\,|\,Y}(x\,|\,y_j) = \frac{\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}}{\frac{dF_Y(y)}{dy}}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Με την προυπόθεση ότι η αντίστοιχη μερική παράγωγος της από κοινού υπάρχει, η παράγωγος της περιθώριας υπάρχει και είναι διάφορη του μηδενός

2.2 Στοχαστική ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

2.5 *Πότε δύο τυχαίες μεταβλητές καλούνται ανεξάρτητες;*

Απάντηση: Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητες ή απλώς ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει η σχέση

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

2.6 *Ποια είναι η σχέση ανεξαρτησίας και συναρτήσεων πιθανοτήτων στη διακριτή περίπτωση ;*

Απάντηση: Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι διακριτές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x_i, y_j), \quad i, j = 0, 1, 2 \ldots$$

και περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας

$$f_X(x_i),\ i = 0, 1, 2 \ldots \quad \text{και} \quad f_Y(y_j),\ j = 0, 1, 2 \ldots$$

τότε είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν :

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = f_X(x_i) \cdot f_Y(y_j), \quad i, j = 0, 1, 2 \ldots$$

2.7 *Ποια είναι η σχέση ανεξαρτησίας και συναρτήσεων πυκνοτήτων στη συνεχή περίπτωση ;*

Απάντηση: Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι συνεχείς με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

και περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_Y(y),\ y \in \mathbb{R}$$

τότε είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Σχόλιο: Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες τότε και οι τυχαίες μεταβλητές $Z = g(X)$ και $W = h(Y)$ είναι επίσης ανεξάρτητες, όπου $g(\cdot)$ και $h(\cdot)$ συναρτήσεις.

2.3 Κατανομή συνάρτησεων τυχαίων μεταβλητών

2.8 *Αν X είναι μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και $Y = (Y_1, Y_2)$ μια συνάρτηση της ποια είναι η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων πυκνοτήτων τους;*

Απάντηση: Έστω ότι η $X = (X_1, X_2)$ είναι μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητητας[6] $f_X(x_1, x_2) > 0, \quad (x_1, x_2) \in R_X \subseteq \mathbb{R}^2$ Αν ο μετασχηματισμός

$$y_i = g_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2$$

[6] $R_X := X(\Omega)$

είναι 1-1[7] απο το σύνολο R_X επί του συνόλου $R_Y := g(R_X)$ και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$x_j = h_j(y_1, y_2), \quad j = 1, 2$$

υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial h_j(y_1, y_2)}{\partial y_i} \quad i, j = 1, 2$$

και είναι συνεχείς τότε η $Y = (Y_1, Y_2)$ με $Y_i = g_i(X_1, X_2), \quad i = 1, 2$ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X\left(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)\right) \cdot |J|, \quad (y_1, y_2) \in R_Y. \tag{3}$$

όπου

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του αντίστροφου μετασχηματισμού.

2.4 Μέση Τιμή

2.9 *Ποια είναι η μέση τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής $g(X, Y)$;*

Απάντηση: Έστω ότι η (X, Y) είναι μια διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 0, 1, 2 \dots$. Αν $g(x, y)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση τότε η μέση τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής $g(X, Y)$ ορίζεται από τη σχέση

$$E\left[g(X, Y)\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \cdot f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

με την προυπόθεση ότι

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |g(x_i, y_j)| \cdot f_{X,Y}(x_i, y_j) < +\infty.$$

2.10 *Ποια είναι η μέση τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής $g(X, Y)$;*

[7] ένα προς ένα ή αλλιώς αμφιμονοσήμαντος

Απάντηση:Έστω ότι η (X, Y) είναι μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_{X,Y}(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}$. Αν $g(x, y)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση τότε η μέση τιμή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής $g(X, Y)$ ορίζεται από τη σχέση

$$E\left[g(X,Y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy,$$

με την προυπόθεση ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x,y)|\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy < +\infty.$$

2.11 *Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής διδιάστατων τυχαίων μεταβλητών;*

Απάντηση:

i. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές των οποίων υπάρχουν οι μέσες τιμες και a, b είναι σταθερές τότε:
$$E(a\cdot X + b\cdot Y) = a\cdot E(X) + b\cdot E(Y).$$

ii. Αν επιπλέον οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε:
$$E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y).$$

iii. Αν $g(X)$ συνάρτηση της X και $h(Y)$ συνάρτηση της Y ττων οποίων υπάρχουν οι μέσες τιμες τότε:
$$E\left[g(X) + h(Y)\right] = E\left[g(X)\right] + E\left[h(Y)\right].$$

iv. Αν επιπλέον οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε:
$$E\left[g(X)\cdot h(Y)\right] = E\left[g(X)\right]\cdot E\left[h(Y)\right].$$

v. Αν $g(X, Y)$ και $h(X, Y)$ συναρτήσεις μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) των οποίων υπάρχουν οι μέσες τιμες τότε:
$$E\left[g(X,Y) + h(X,Y)\right] = E\left[g(X,Y)\right] + E\left[h(X,Y)\right].$$

2.5 Συνδιακύμανση και συντελεστής συσχέτισης

2.12 *Τι είναι συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών ;*

Απάντηση: Έστω (X, Y) μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών X και Y συμβολίζεται με $C(X, Y)$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$C(X,Y) = E\left[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right]$$

με την προυπόθεση ότι υπάρχει η μέση τιμή στα δεξιά.

Σχόλιο: Αν $X = Y$ προκύπτει ότι $C(X, X) = V(X)$ δηλαδή σε αυτή τη περίπτωση η συνδιακύμανση είναι η διασπορά της X.

2.13 *Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες της συνδιακύμανσης;*

Απάντηση:

i. Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές των οποίων υπάρχει η συνδιακύμανση και a, b, c, d είναι σταθερές τότε:

$$C(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot C(X, Y). \tag{4}$$

ii. Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών μεταβλητής X και Y εκφράζεται ως εξής:

$$C(X,Y) = E(X \cdot Y) - [E(X) \cdot E(Y) \tag{5}$$

με την προυπόθεση ότι υπάρχουν οι μέσες τιμές στο δεξιό μέλος.

iii. Αν X, Y και Z είναι τυχαίες μεταβλητές των οποίων υπάρχουν οι συνδιακυμάνσεις $C(X, Y)$ και $C(X, Z)$ τότε :

$$C(X, Y + Z) = C(X, Y) + C(X, Z) \tag{6}$$

Σχόλιο: Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες προκύπτει ότι $C(X, Y) = 0$, το αντίστροφο γενικά ΔΕΝ ισχύει.

2.14 *Πότε δύο τυχαίες μεταβλητές καλούνται ασυσχέτιστες;*

Απάντηση: Έστω (X, Y) μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνδιακύμανση $C(X, Y)$. Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y καλούνται ασυσχέτιστες αν και μόνο αν $C(X, Y) = 0$

2.15 *Ποια είναι η σχέση μεταξύ διασποράς και συνδιακύμανσης δύο τυχαίων μεταβλητών;*

Απάντηση: Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές των οποίων υπάρχουν οι $E(X^2)$ και $E(Y^2)$ και a, b σταθερές. Τότε ισχύει η σχέση:

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\, C(X, Y). \tag{7}$$

Σχόλιο:

i. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες ή απλά ασυσχέτιστες τότε

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$$

ii. ο τύπος (7) γενικεύεται με X_i, $\quad i = 1, 2 \ldots, k$ τυχαίες μεταβλητές, των οποίων υπάρχουν οι $E(X_i^2)$, $\quad i = 1, 2 \ldots, k$ και a_i, $\quad i = 1, 2 \ldots, k$ σταθερές με τη σχέση

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i <} \sum_{j \le k} a_i a_j C(X_i, X_j)$$

2.16 *Τι είναι ο συντελεστής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών;*

Απάντηση: Έστω (X, Y) μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνδιακύμανση $C(X, Y)$ και διασπορές $V(X)$ και $V(Y)$ ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών X και Y συμβολιζόμενος με ρ ή $\rho(X, Y)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}}$$

Σχόλιο: Ισχύει πάντα ότι για κάθε (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή

$$-1 \le \rho(X, Y) \le 1$$

2.6 Δεσμευμένες μέση τιμή και διασπορά

2.17 *Τι καλείται δεσμευμένη μέση τιμή στη διακριτή περίπτωση;*

Απάντηση: Έστω ότι η (X, Y) είναι μια διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και

$$f_{X\,|\,Y}(x_i\,|\,y_j), \quad i = 1, 2, \ldots$$

η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένης της $Y = y_j$. Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένης της $Y = y_j$ συμβολιζόμενη με $E(X \,|\, y_j)$ δίνεται από τη σχέση

$$E(X \,|\, y_j) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \, f_{X\,|\,Y}(x_i \,|\, y_j)$$

Με την προυπόθεση ότι η $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \, f_{X\,|\,Y}(x_i \,|\, y_j) < +\infty$.

2.18 *Τι καλείται δεσμευμένη μέση τιμή στη συνεχή περίπτωση;*

Απάντηση: Έστω ότι η (X, Y) είναι μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και

$$f_{X\,|\,Y}(x \,|\, y), \quad x \in \mathbb{R}$$

η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένης της $Y = y$. Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένης της $Y = y$ συμβολιζόμενη με $E(X \,|\, y)$ δίνεται από τη σχέση

$$E(X \,|\, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{X\,|\,Y}(x \,|\, y) \, dx$$

Με την προυπόθεση ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, f_{X\,|\,Y}(x \,|\, y) \, dx < +\infty$.

2.19 *Τι καλείται δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών στη διακριτή περίπτωση;*

Απάντηση: Έστω ότι η (X, Y) είναι μια διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και

$$f_{X\,|\,Y}(x_i \,|\, y_j), \quad i = 1, 2, \ldots$$

η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένης της $Y = y_j$.Αν $g(x, y)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής $g(X, Y)$ δεδομένης της $Y = y_j$ συμβολιζόμενη με $E\left[g(X, Y) \,|\, y_j\right]$ δίνεται από τη σχέση

$$E\left[g(X, Y) \,|\, y_j\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \, f_{X\,|\,Y}(x_i \,|\, y_j)$$

Με την προυπόθεση ότι η $\sum_{i=0}^{+\infty} |g(x_i, y_j)| \, f_{X\,|\,Y}(x_i \,|\, y_j) < +\infty$.

2.20 *Τι καλείται δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών στη συνεχή περίπτωση;*

Απάντηση: Έστω ότι η (X, Y) είναι μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y), \quad x \in \mathbb{R}$$

η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένης της $Y = y$. .Αν $g(x, y)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της συνεχής τυχαίας μεταβλητής $g(X, Y)$ δεδομένης της $Y = y$ συμβολιζόμενη με $E\left[g(X, Y)\,|\,y\right]$ δίνεται από τη σχέση

$$E(X\,|\,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x, y)\, f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\, dx$$

Με την προυπόθεση ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} |(x, y)|\, f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\, dx < +\infty$.

2.21 *Τι είναι το θεώρημα διπλής μέσης τιμής;*

Απάντηση: Έστω ότι η (X, Y) είναι μια διακριτή ή συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Αν $g(x, y)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε

$$E\left\{E\left[g(X, Y)\,|\,Y\right]\right\} = E\left[g(X, Y)\right]$$

Με την προυπόθεση της ύπαρξης της μέσης τιμής $E\left[g(X, Y)\right]$.

Σχόλιο: Στην ειδική περίπτωση που $g(X, Y) = X$ από το θεώρημα διπλής μέσης τιμής έχουμε

$$E\left[E\left(X\,|\,Y\right)\right] = E\left(X\right)$$

2.22 *Τι καλείται δεσμευμένη διασπορά ;*

Απάντηση: Έστω ότι (X, Y) μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή της οποίας υπάρχει η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X\,|\,y)$ Τότε η δεσμευμένη διασπορά της X δεδομένης της $Y = y$ συμβολιζόμενη με $V(X\,|\,y)$ δίνεται από τη σχέση

$$V(X\,|\,y) = E\left\{\left[X - E(X\,|\,y)\right]^2\,|\,y\right\}$$

με την προυπόθεση ότι υπάρχει η σημειούμενη στο δεξιό μέλος μέση τιμή.

2.23 *Τι καλείται δεσμευμένη τυπική απόκλιση ;*

Απάντηση: Η θετική τετραγωνική ρίζα της δεσμευμένης διασποράς $V(X|y)$ (όπως την περιγράψαμε στην προηγούμενη ερώτηση)

$$\sigma_{X\,|\,Y} = \sqrt{V(X\,|\,y)}$$

2.24 *Να εκφράσετε τη μέση τιμή και διασπορά με τη βοήθεια δεσμευμένης μέσης τιμής και δεσμευμένης διασποράς.*

Απάντηση: Έστω (X, Y) μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή της οποίας υπάρχει η $E(X^2)$. Τότε:

i.

$$E\,(X) = E\,[E\,(X\,|\,Y)]$$

ii.

$$V(X) = E\,[V(X|N)] + V\,[E(X|N)]$$