ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Συνήθεις Διακριτές Τυχαίες μεταβλητές

Κατανομή Bernoulli

Λέμε ότι η X ακολουθεί Κατανομή Bernoulliμε παράμετρο p συμβολίζουμε με $X \sim Ber(p)$. Αν X, Y ανεξάρτητες

$X \sim Ber(p)$, $Y \sim Ber(p)$
$X + Y \sim Bin(2, p)$

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = p$$

- Διασπορά

$$V(X) = p(1-p)$$

- $x \in \{0, 1\}$
- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t$$

Διωνυμική Κατανομή

Λέμε ότι η X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p συμβολίζουμε με $X \sim Bin(n, p)$. Αν X, Y ανεξάρτητες

$X \sim Bin(n, p)$, $Y \sim Bin(m, p)$
$X + Y \sim Bin(n + m, p)$

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = np$$

- Διασπορά

$$V(X) = np(1-p)$$

- $x \in \{0, \dots, n\}$
- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \left(1 - p + pe^t\right)^n$$

Γεωμετρική Κατανομή

Λέμε ότι η X ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p και συμβολίζουμε με $X \sim Geo(p)$. Αν X, Y ανεξάρτητες

$X \sim Geo(p)$, $Y \sim Geo(m, p)$
$X + Y \sim NegBin(2, p)$

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- Διασπορά

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

- $x \in \{1, 2, \dots\}$
- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$$

για $t < -\ln(1-p)$

Συνήθεις Διακριτές Τυχαίες μεταβλητές

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Λέμε ότι η X ακολουθεί Αρνητική Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r,p και συμβολίζουμε με $X \sim NegBin(r, p)$. Αν X, Y ανεξάρτητες

$$X \sim NegBin(n,p)\ ,\ Y \sim NegBin(m,p)$$
$$X + Y \sim NegBin(n + m,p)$$

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

- Διασπορά

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

- $x \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$
- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$$

για $t < -\ln(1-p)$

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Λέμε ότι η X ακολουθεί Υπεργεωμετρική κατανομή με παραμέτρους r,s n και συμβολίζουμε με $X \sim Hypergeometric(r, s, n)$

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{s}{n-x}}{\binom{r+s}{n}}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = n\frac{r}{r+s}$$

- Διασπορά

$$V(X) = n \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r+s-n}{r+s-1}$$

- $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Κατανομή Poisson

Λέμε ότι η X ακολουθεί Κατανομή Poisson με παράμετρο λ και συμβολίζουμε με $X \sim Pois(\lambda)$. Αν X, Y ανεξάρτητες

$$X \sim Pois(\lambda)\ ,\ Y \sim Pois(m)$$
$$X + Y \sim Pois(\lambda + m)$$

- Συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = \lambda$$

- Διασπορά

$$V(X) = \lambda$$

- $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$
- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

Βασικές Συνεχείς Τυχαίες μεταβλητές

Εκθετική Κατανομή

Χ εκθετική κατανομή με παράμετρο θ και συμβολίζουμε $X \sim Exp(\theta)$. Αν X, Y ανεξάρτητες

$X \sim Exp(\theta)$, $Y \sim Exp(m)$
$\min\{X, Y\} \sim Exp(\theta + m)$

$X \sim Exp(\theta)$, $Y \sim Exp(\theta)$
$X + Y \sim Gamma(2, \theta)$

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & \text{αν } x > 0. \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = \frac{1}{\theta}$$

- Διασπορά

$$V(X) =) = \frac{1}{\theta^2}$$

- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - \frac{t}{\theta}}$$

για $t < \theta$

Κανονική κατανομή

X κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ συμβολίζουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Αν X, Y ανεξάρτητες

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

- Συνάρτηση Πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , x \in \mathbb{R}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = \mu$$

- Διασπορά

$$V(X) = \sigma^2$$

- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Βασικές Συνεχείς Τυχαίες μεταβλητές

Ομοιόμορφη συνεχής κατανομή

$X =$ τυχαία συνεχής μεταβλητή που παίρνει τιμές στο σύνολο $[a,b]$

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Διασπορά

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$$

Κατανομή Γάμμα

Όταν η X τυχαία συνεχής μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με θετικές παραμέτρους α και β συμβολίζουμε $X \sim Gamma(\alpha,\beta)$. Αν X,Y ανεξάρτητες

$$X \sim Gamma(a,\theta)\ ,\ Y \sim Gamma(b,\theta)$$
$$X+Y \sim Gamma(a+b,\theta)$$

$$X \sim Gamma(a,\theta)\ ,\ bX \sim Gamma(a,\tfrac{\theta}{b})$$

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}\beta^{\alpha}e^{-x\beta}, & \text{αν } x>0. \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

- Διασπορά

$$V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \frac{1}{\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

για $t < \beta$

Κατανομή χ^2_n

Όταν η X τυχαία συνεχής μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με θετικές παραμέτρους $\alpha = \frac{n}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$ συμβολίζουμε $X \sim \chi^2_n$ (ή $X \sim Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$). Αν X, Y ανεξάρτητες

> $X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$
> $X + Y \sim \chi^2_{n+m}$

> Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε
> $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ και
> $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{2}^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{αν } x > 0. \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = n$$

- Διασπορά

$$V(X) = 2n$$

- Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}$$

για $t < \beta$

Κατανομή F_{n_1,n_2}

θεωρούμε $X_1 \sim \chi^2_{n_1}$ και $X_2 \sim \chi^2_{n_2}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε η κατανομή της $X = \frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}}$ λέμε ότι ακολουθεί την $F-$ κατανομή με n_1 και n_2 βαθμούς ελευθερίας και συμβολίζουμε $X \sim F_{n_1,n_2}$

> Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ τυχαίο δείγμα με $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y_1, Y_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα με $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ανεξάρτητα τότε $\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n_1,n_2}$

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{n_2}{2})} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{x n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = \frac{n_1 + n_2}{2}, \quad n_2 > 2$$

- Διασπορά

$$V(X) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}$$

Κατανομή t_n

θεωρούμε $X_1 \sim N(0,1)$ και $X_2 \sim \chi^2_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε η κατανομή της $X = X_1 / \sqrt{X_2/n}$ λέμε ότι ακολουθεί την $t-$ κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας και συμβολίζουμε $X \sim t_n$

> Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$,$\sigma^2$ άγνωστο τότε $\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

- Συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

- Μέση Τιμή

$$E(X) = 0$$

- Διασπορά

$$V(X) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2$$